

§1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ

Рациональные уравнения

1.1 а) Решите уравнение

$$\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7 \left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} \right) + 10$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 2]$.

Ответ:

а)

б)

1.2 а) Решите уравнение

$$\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{20}{(x+3)^2} = 8 \left(\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3} \right) + 1$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-6; -4]$.

Ответ:

а)

б)

1.3 а) Решите уравнение

$$\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7 \left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} \right) - 1$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 3]$.

Ответ:

а)

б)

1.4 а) Решите уравнение

$$\frac{(x-4)^2}{2} + \frac{18}{(x-4)^2} = 7 \left(\frac{x-4}{2} - \frac{3}{x-4} \right) + 10$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[3; 13]$.

Ответ:

а)

б)

Показательные уравнения

1.5 а) Решите уравнение

$$3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $[2; 3]$.

Ответ:

а)

б)

1.6 а) Решите уравнение

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(1; 7/3)$.

Ответ:

а)

б)

1.7 а) Решите уравнение

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[2; \sqrt{10}]$.

Ответ:

а)

б)

1.8 а) Решите уравнение

$$27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4; \log_3 10]$.

Ответ:

а)

б)

1.9 а) Решите уравнение

$$4^{x^2-2x+1} + 4^{x^2-2x} = 20.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$.

Ответ:

а)

б)

1.10 а) Решите уравнение

$$4^{x^2-1} - 24 \cdot 2^{x^2-3} + 8 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5/3; 2]$.

Ответ:

а)

б)

1.11 а) Решите уравнение

$$7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$.

Ответ:

а)

б)

1.12 а) Решите уравнение

$$3 \cdot 9^{x+1} - 5 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 2^{2x} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi/2; \pi]$.

Ответ:

а)

б)

1.13 а) Решите уравнение

$$(x^2 + 4x - 2)(4^{3x+1} + 8^{2x-1} - 11) = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-0,5; 0,5]$.

Ответ:

а)

б)

Логарифмические уравнения

1.14 а) Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 14x) = 5.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 0,1; 5\sqrt{10}]$.

Ответ:

а)

б)

1.15 а) Решите уравнение

$$\log_5(2 - x) = \log_{25} x^4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8]$.

Ответ:

а)

б)

1.16 а) Решите уравнение

$$\log_7(x + 2) = \log_{49}(x^4).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_6 \frac{1}{7}; \log_6 35]$.

Ответ:

а)

б)

1.17 а) Решите уравнение

$$6 \log_8^2 x - 5 \log_8 x + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 2,5]$.

Ответ:

а)

б)

1.18 а) Решите уравнение

$$1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 8/9]$.

Ответ:

а)

б)

§2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И СМЕШАННЫЕ

Тригонометрические уравнения

2.1 а) Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos x} + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
 Ответ:

а)

б)

2.2 а) Решите уравнение

$$2 \cos^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x + 2 \cos x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
 Ответ:

а)

б)

2.3 а) Решите уравнение

$$\frac{7}{1 - \cos^2 x} + \frac{9}{\sin x} = 10.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
 Ответ:

а)

б)

2.4 а) Решите уравнение

$$2 \cos^2 x - 3 \sin(-x) - 3 = 0.$$

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.
 Ответ:

а)

б)

2.5 а) Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.
 Ответ:

а)

б)

2.6 а) Решите уравнение

$$6 \cos^2 x - 7 \cos x - 5 = 0.$$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.
 Ответ:

а)

б)

2.7 а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.
 Ответ:

а)

б)

2.8 а) Решите уравнение

$$2 \sin^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.
 Ответ:

а)

б)

2.9 а) Решите уравнение
 $4\sin^3 x + 4\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sin x = 4\sqrt{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.10 а) Решите уравнение
 $2\sin^3 x + \sin x + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.11 а) Решите уравнение
 $2\cos^3 x = \sqrt{3}\sin^2 x + 2\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.12 а) Решите уравнение
 $\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.13 а) Решите уравнение
 $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$.

б) Укажите корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.14 а) Решите уравнение
 $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$.

б) Найдите все корни уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.15 а) Решите уравнение
 $\sin 2x - 2\sin x + 2\cos x - 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.16 а) Решите уравнение
 $\sqrt{3}\sin^2 2x - 2\sin 4x + \sqrt{3}\cos^2 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

Ответ:

а)

б)

2.17 а) Решите уравнение
 $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$.

б) Найдите все корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.18 а) Решите уравнение
 $2 \sin x \cos^2 x - \sqrt{2} \sin 2x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.19 а) Решите уравнение
 $\sin^3 x + \cos 2x + \sin x = 1$

б) Найдите корни этого уравнения,
 принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.20 а) Решите уравнение
 $\sin x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.21 а) Решите уравнение
 $\cos 2x + \sin(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.22 а) Решите уравнение
 $\cos 2x - \sin 2x = \cos x + \sin x + 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.23 а) Решите уравнение:
 $16 \sin^4 x + 8 \cos 2x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения,
 принадлежащие отрезку $[0,5\pi; 2\pi]$.

Ответ:

а)

б)

2.24 а) Решите уравнение
 $2 \cos^2 x + 2 \sin 2x = 3$.

б) Укажите корни данного уравнения,
 принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$.

Ответ:

а)

б)

2.25 а) Решите уравнение

$$4 \cos^2 x - 1 = -\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.26 а) Решите уравнение

$$7 \sin \left(2x - \frac{5\pi}{2} \right) + 9 \cos x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.27 а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 x - (2 + \sqrt{3}) \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sqrt{3} = 0.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2} \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.28 а) Решите уравнение

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}(7\pi - 2x) = -1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.29 а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 1 = 0.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.30 а) Решите уравнение

$$2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos 2x = \sqrt{6} \sin x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.31 а) Решите уравнение

$$\cos 2x = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.32 а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3,5\pi]$.

Ответ:

а)

б)

2.33 а) Решите уравнение

$$\cos x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 1 = \sqrt{3} \sin 2x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2} \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.34 а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.35 а) Решите уравнение

$$\cos 2x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

Ответ:

а)

б)

2.36 а) Решите уравнение

$$2 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \sin 2x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.37 а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.38 а) Решите уравнение

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.39 а) Решите уравнение

$$\sin 2x = 2 \sin x + \sin \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) + 1.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.40 а) Решите уравнение

$$2 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + \sqrt{3} \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

Ответ:

а)

б)

2.41 а) Решите уравнение $\sin^2 x + 0,5 \sin 2x + x^{\ln 1} = 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.42 а) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin x - 1} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.43 а) Решите уравнение

$$\frac{3 \operatorname{ctg}^2 x + 4 \operatorname{ctg} x}{5 \cos^2 x - 4 \cos x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.44 а) Решите уравнение

$$\cos x = \sqrt{\frac{\sin x + 1}{2}}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.45 а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + \sin x \cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \cos^2 x) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.46 а) Решите уравнение

$$4 \sin x \cos^2 x - 1 = 2 \cos x (\sin x - 1).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.47 а) Решите уравнение

$$(4 \sin^2 x - 1)\sqrt{x^2 - 64\pi^2} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[25; 30]$.

Ответ:

а)

б)

2.48 а) Решите уравнение

$$(4 \sin^2 x - 3)\sqrt{36\pi^2 - x^2} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-20; -15]$.

Ответ:

а)

б)

2.49 а) Решите уравнение

$$(4 \cos^2 x - 1)\sqrt{49\pi^2 - x^2} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[20; 25]$.

Ответ:

а)

б)

Смешанные уравнения

2.50 а) Решите уравнение

$$\left(\frac{16}{9}\right)^{\cos x} + 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\cos x} - 4 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 5\pi]$.

Ответ:

а)

б)

2.51 а) Решите уравнение

$$\left(\frac{36}{49}\right)^{\sin x} + 4 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{\sin x} - 5 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.52 а) Решите уравнение

$$\left(\frac{16}{49}\right)^{\operatorname{tg} x} + 5 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} - 6 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.53 а) Решите уравнение

$$(49^{\sin x})^{\cos x} = 7\sqrt{3} \sin x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.54 а) Решите уравнение

$$(81^{\sin x})^{\cos x} = 9\sqrt{2} \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ответ:

а)

б)

2.55 а) Решите уравнение

$$(36^{\sin x})^{\cos x} = 6\sqrt{3} \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

Ответ:

а)

б)

2.56 а) Решите уравнение

$$49^{\cos^2 x} = 7\sqrt{2} \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

Ответ:

а)

б)

2.57 а) Решите уравнение

$$(5^x - 6)^2 - 6|5^x - 6| + 5^2 = 25 - 5^x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1; 2]$.

Ответ:

а)

б)

2.58 а) Решите уравнение

$$(4^x - 8)^2 - 10|4^x - 8| = 3 \cdot 4^x - 36.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

Ответ:

а)

б)

2.59 а) Решите уравнение

$$2(3^x - 5)^2 + 3^x + 19 = 15|3^x - 5|.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 1]$.

Ответ:

а)

б)

2.60 а) Решите уравнение

$$(4^x - 5)^2 + 2 \cdot 4^x = 19|4^x - 5|.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 1]$.

Ответ:

а)

б)